**5. Шартты гетерогенділіктің авторегрессиялық моделі ARCH (p).**

Тағы бір айта кететініміз $ε=(ε\_{n})\_{n\geq 1}$ кезектілік дегеніміз $F\_{n}=σ(ε\_{1},…,ε\_{n})$ кездейсоқтығының жалғыз көзі .

 $μ\_{n}=E(h\_{n}|$ $F\_{n-1})=0,$ (12)

және

 $σ\_{n}^{2}=E\left(F\_{n-1}\right)=a\_{0}+\sum\_{i=1}^{p}a\_{0}h\_{n-i}^{2}$ (13)

мұндағы $a\_{0}>0,a\_{i}\geq 0,i=1,…,p,F\_{0}=\left\{∅,Ω\right\},h\_{1-p}, …, h\_{0}$- берілген бастапқы тұрақтылар.

Басқаша айтқанда, $σ\_{n}^{2}$ шартты дисперсиясы $h\_{n-1}^{2}, …, h\_{n-p}^{2}$ мәндердің функциясы болып табылады.

1982 жылы енгізілген бұл модель Энглем (R. F. Engle,) және ол ARCH(p) (AutoRegressive Conditional Heteroskedastic model-шартты гетерогенділіктің авторегрессиялық моделі), бірқатар тривиалды емес қасиеттерді түсіндіруде өте сәтті болды.

Сонымен,

 $h\_{n}=σ\_{n}ε\_{n}$ , $n\geq 1$ (14)

мұндағы $ε=(ε\_{n})$ - тәуелсіз қалыпты үлестірілген кездейсоқ шамалардың тізбегі,$ ε\_{n}\~N(0,1)$ , ал $σ\_{n}^{2}$ (13) формуласы бойынша анықталады.

Егер (12) теңдіктің орнына бізде

 $μ\_{n}=a\_{0}+a\_{1}h\_{n-1}+…+a\_{r}h\_{n-r},$ (15)

ал $σ\_{n}^{2}$ (13) шартына бағынады, содан кейін (4) теңдеу мына форманы алады:

 $h\_{n}=a\_{0}+a\_{1}h\_{n-1}+…+a\_{r}h\_{n-r}+σ\_{n}ε\_{n}$ (16)

Бұл модельдер кейде AR(r)/ARCH(p) деп аталады.

 ($E h\_{n}^{2}< \infty $) қойсақ

 $v\_{n}=h\_{n}^{2}-σ\_{n}^{2}$ (17)

Содан кейін (13) формулаға байланысты бізде

 $h\_{n}^{2}= a\_{0}+\sum\_{i=1}^{p}a\_{i}h\_{n-i}^{2}+v\_{n}$ (18)

Онда

 $E(h\_{n}|$ $F\_{n-1}$) = $E(h\_{n}^{2}|$ $F\_{n-1}$)-$ σ\_{n}^{2} $= 0,

яғни, $v=v\_{n}$ тізбегі мартингал айырмашылығын құрайды.

**6.** **Шартты гетерогенділіктің жалпыланған авторегрессиялық моделі GARCH(p, q).** ARCH (p) моделін қолданудың сәттілігі оның әртүрлі жалпылауының, нақтылауының, модификациясының және т. б. пайда болуына әкелді.

Берілген GARCH моделі(p,q) (Generalized ARCH - Шартты гетерогенділіктің жалпыланған авторегрессиялық моделі) Т. Боллерслев енгізген (T. Bollerslev) 1986 жылы, осындай сорттардың бірі.

 $μ\_{n}=σ\_{n}^{2}$= 0

теңдіктің орнына (13) формула бар деп болжаймыз.

 $σ\_{n}^{2}=E(h\_{n}|$ $F\_{n-1}$)=$ a\_{0}+\sum\_{i=1}^{p}a\_{i}h\_{n-i}^{2}+\sum\_{i=1}^{p}β\_{j}σ\_{n-j}^{2}$ (19)

 $a\_{0}>0, a\_{i}, β\_{j} \geq 0$ және $(h\_{1-p}, …, h\_{0}), \left(σ\_{1-q}^{2}, …, σ\_{0}^{2}\right),$ "бастапқы" шарттармен қарапайымдылық үшін оны тұрақты деп санауға болады.

GARCH (p, q) моделі – h= ($h\_{n})$ тізбегі,

 $h\_{n}$ =$ σ\_{n}ε\_{n}$ (20)

Біз белгілейміз :

 $a\left(L\right)h\_{n-1}^{2}=\sum\_{i=1}^{p}a\_{i}h\_{n-i}^{2}$ (21)

мұндағы L-ығысу операторы $(L^{i}h\_{n-1}^{2}=h\_{\left(n-1\right)-i}^{2})$ және

 $β\left(L\right)σ\_{n-1}^{2}=\sum\_{j=1}^{q}β\_{j}σ\_{n-j}^{2}$. (22)

Осы белгілерде

 $σ\_{n}^{2}=a\_{0}+a\left(L\right)h\_{n-1}^{2}+ β\left(L\right)σ\_{n-1}^{2}$

Егер, жоғарыда айтылғандай, $v\_{n}=h\_{n}^{2}-σ\_{n}^{2}$ қойса, онда біз аламыз:

 $h\_{n}^{2}=v\_{n}+σ\_{n}^{2}=v\_{n}+a\_{0}+a\left(L\right)h\_{n-1}^{2}+β\left(L\right)(h\_{n-1}^{2}-v\_{n-1})= $

$$ =a\_{0}+(a\left(L\right)+β\left(L\right))h\_{n-1}^{2}-β\left(L\right)v\_{n-1}+v\_{n}.$$

Басқаша айтқанда,

 $h\_{n}^{2}$ =$a\_{0}+a\left(L\right)$ +$ β\left(L\right))h\_{n-1}^{2}$ +$v\_{n}$ -$ β\left(L\right)v\_{n-1}$. (23)

Осылайша, GARCH(p, q)-модельді мартингал айырмасы болып табылатын $v\_{n}$ "Шу" бар $h\_{n}^{2}$ реттілігі үшін ARMA (max (p, q), q) сырғымалы орташа авторегрессия моделі ретінде қарастыруға болады.

Атап айтқанда, ARCH(1) моделі үшін

 $h\_{n}$ =$ σ\_{n}ε\_{n}$ , $σ\_{n}^{2}=$ $a\_{0}+a\_{1}h\_{n-1}^{2}$

Біз $v\_{n}=h\_{n}^{2}-σ\_{n}^{2}$ деп санаймыз, онда

$$h\_{n}^{2}=a\_{0}+a\_{1}h\_{n-1}^{2}+v\_{n}$$

Мұндағы $v\_{n}$ " Шу " мартингал айырмасын құрайды.

ARCH және GARCH модельдерінің әртүрлі жалпылауы (мысалы, EGARCH,

AGARCH, STARCH, NARCH, MARCH, HARCH,...) байланысты, сайып келгенде,

$σ\_{n}^{2}=E(h\_{n}^{2}|$ $F\_{n-1}$)$ $шамаларының бір немесе басқа сипаттамасымен $F\_{n-1}=σ(ε\_{1}, …, ε\_{n-1}$ алгебраларына қатысты өлшенетін функциялар ретінде.

**7. Стохастикалық құбылмалылық моделі.**

Барлық алдыңғы модельдерде кездейсоқтықтың көзі біреу болды. Ол тәуелсіз шамалардың Гаусс тізбегі $ε=(ε\_{n})$ арқылы анықталды. Стохастикалық құбылмалылық модельдері

кездейсоқтықтың екі көзін қамтиды: $ε=(ε\_{n})$ және $δ=(δ\_{n})$, олар қарапайым жағдайда олар тәуелсіз және стандартты Гаусс тізбегі деп саналады, яғни тәуелсіз N(0, 1)-бөлінген кездейсоқ шамалардан тұрады.

$G\_{n}=σ\left(δ\_{1}, …,δ\_{n}\right)$болсын. Қойыңыз

 $h\_{n}$ =$ σ\_{n}ε\_{n}$ (24)

Сонда бұл анық

 Law($h\_{n}|G\_{n}$) = N(0,$ σ\_{n}^{2}$ ) (25)

яғни $G\_{n}$ шартты таралуы, параметрлері 0 және $σ\_{n}^{2} $ болатын $h\_{n}$ гауссиан

Қойсақ:

 $σ\_{n}=e^{\frac{1}{2}∆\_{n}}$ (26)

Табиғи жалпылау (24) - бұл схема

 $h\_{n}$ =$ μ\_{n}+ σ\_{n}ε\_{n}$ (27)

мұндағы $μ\_{n} және σ\_{n} $ $G\_{n}$-өлшенетін болып табылады.

Формула бойынша (27) $ε=(ε\_{n})$кезектілігі қалыпты бөлінген стационарлық тізбекті құрайтын жағдайда, E $ε\_{n}=0, $ E $ε\_{n}^{2}=1 $тәуелді емес $ε=(ε\_{n})-ге$ , сәйкес модель Тейлор моделінің атауы.